

DM de mathématiques n°3

Fonctions usuelles

à rendre pour le lundi 3 novembre

On considère les fonctions

$$f : x \mapsto \frac{1}{2} \operatorname{arctan}(\operatorname{sh}(x)) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \operatorname{arctan}\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)}\right).$$

On va montrer que $f = g$ de deux manières différentes.

- 1)
 - a) Déterminer le domaine de définition D de f et g .
 - b) Montrer que f et g sont dérivables sur D . Calculer f' et g' .
 - c) En déduire le résultat voulu.
- 2)
 - a) Rappeler le domaine de définition E de la fonction $\tan$.
 - b) Montrer que : $\forall x \in D \quad 2f(x) \in E$. Pour x dans D , calculer $\tan(2f(x))$.
 - c) Montrer que la fonction $h : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)}$ est à valeurs dans $] -1, 1[$.
 - d) Montrer que : $\forall x \in D \quad 2g(x) \in E$. Pour x dans D , calculer $\tan(2g(x))$.
 - e) En déduire le résultat voulu.
- 3) Application :
 - a) Calculer $\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2} \ln(3)\right)$ et $\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2} \ln(3)\right)$.
 - b) En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2 : des fonctions méchantes

On veut montrer l'identité suivante :

$$\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{4} = \arcsin \left(\frac{\sqrt{8} + \sqrt{15}}{12} \right)$$

- 1) Montrer que $\sin \left(\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{4} \right) = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{15}}{12}$.
- 2) Conclure.